2020

MATHEMATICS — GENERAL

Paper : GE/CC-1

Full Marks : 65

Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.

প্রান্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

১নং প্রশ্ন আবশ্যিক এবং প্রতি **ইউনিট** থেকে কমপক্ষে ***একটি*** করে মোট ***নয়টি*** প্রশ্নের উত্তর দাও।

১। নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির মধ্যে থেকে সঠিক উত্তরটি নির্বাচন করো ঃ ২×১০

(ক) $\mathrm{Re}\left(i^{1/2}\right)+\left|\mathrm{Im}\left(i^{1/2}\right)\right|$-এর সঠিক মান

(অ) $-1, 1$ (আ) $0, \sqrt{2}$

(ই) $0, 1$ (ঈ) $1, \sqrt{2}$

(খ) যদি $\alpha, \beta, \gamma, x^3-3x^2+3x+7=0$-এই সমীকরণটির বীজগুলির মান হয় এবং একক এর ঘনমূল যদি ω হয় তাহলে $(\alpha-1)/(\beta-1)+(\beta-1)/(\gamma-1)+(\gamma-1)/(\alpha-1)$ -এর মান

(অ) ω (আ) ω^2 (ই) 3ω (ঈ) $3\omega^2$

(গ) $\frac{dy}{dx}+Py=Q$, যেখানে P এবং Q হল x-এর অপেক্ষক (function), এই অবকল সমীকরণটির সমাকল গুণকটি হল

(অ) $\int e^P dx$ (আ) $e^{\int P dx}$ (ই) $e^{-\int P dx}$ (ঈ) কোনোটিই নয়।

(ঘ) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=x\sin\frac{dy}{dx}$ অবকল সমীকরণটির মাত্রা (degree) হল

(অ) 1 (আ) 2 (ই) 3 (ঈ) সংজ্ঞায়িত না।

(ঙ) $ax^2+2hxy+by^2=0$-এই সরলরেখা যুগলের ওপর লম্ব সরলরেখা যুগলগুলি হল

(অ) $ax^2-2hxy+by^2=0$ (আ) $ax^2+2hxy+by^2=0$

(ই) $bx^2+2hxy+ay^2=0$ (ঈ) $bx^2-2hxy+ay^2=0$

(চ) α, β, γ যদি $x^3-3x^2+8x-5=0$-এই সমীকরণটির বীজ হয় তাহলে সেই সমীকরণটি নির্ণয় করো যার বীজ হবে $2\alpha+3, 2\beta+3$, এবং $2\gamma+3$

(অ) $y^3+15y^2+95y-217=0$ (আ) $y^3-15y^2+95y-217=0$

(ই) $y^3-15y^2-95y-217=0$ (ঈ) $y^3+15y^2+95y+217=0$

(ছ) k-এর মানটি নির্ণয় করো যার জন্য $x^2+y^2+2x+k=0$ সরলরেখা যুগল হবে

(অ) 1 (আ) 2 (ই) 3 (ঈ) 4

(জ) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos^{-1}(1-x)}{\sqrt{x}}$ -এর মান হল

(অ) π (আ) $\frac{\pi}{2}$ (ই) $\frac{\pi}{3}$ (ঈ) $\frac{\pi}{4}$

(ঝ) A-এর কোন মান এর জন্য $f(x)$ অপেক্ষকটি $x=0$ তে সন্তত যেখানে $f(x)=\sin x\cos\frac{1}{x}, x\neq 0$
$=A, x=0$

(অ) 0 (আ) 1 (ই) 2 (ঈ) 3

(ঞ) যদি $u(x,y)=\tan^{-1}\frac{x^3+y^3}{x-y}, x\neq y$ হয়, তবে $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}$-এর মান হল

(অ) sin$u$ (আ) cos$u$

(ই) sin2u (ঈ) cos2u

Unit-I

(Algebra - I)

২। (ক) যদি $\tan\log(x+iy)=a+ib, a^2+b^2\neq 1$ হয়, তবে দেখাও যে $\tan\log(x^2+y^2)=\frac{2a}{1-a^2-b^2}$

(খ) $x^3-9x^2+23x-15=0$ সমীকরণের বীজগুলি $\alpha-\beta, \alpha$ এবং $\alpha+\beta$ হলে দেখাও যে $3\alpha^2-\beta^2=23$ ৩+২

৩। যদি $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\3&1&0\\-2&1&4\end{pmatrix}$ হয়, তাহলে দেখাও $A^3-5A^2+6A-5I=0$ এবং সেখান থেকে A^{-1}-এর মান নির্ণয় করো। ৩+২

৪। Cardan-এর পদ্ধতির সাহায্যে সমাধান করো ঃ $x^3-12x+65=0$ ৫

Unit-II

(Differential Calculus - I)

৫। (ক) a এবং b-এর মান নির্ণয় করো যার জন্য $\lim_{x\to 0}\frac{x(1+a\cos x)-b\sin x}{x^3}=1$

(খ) যদি $f(x)=\begin{cases}\frac{|x-a|}{x-a}, & x\neq a\\ 1, & x=a\end{cases}$ হয়,

তবে $x=a$ তে f সন্তত কি না নির্ধারণ করো। ৩+২

৬। (ক) যদি $y=e^{ax}\cos^2 x\ \sin x$ হয়, তবে y_n-এর মান নির্ণয় করো।

(খ) যদি $y^{1/m}+y^{-1/m}=2x$ হয়, তবে দেখাও $\left(x^2-1\right)y_{n+2}+\left(2n+1\right)xy_{n+1}+\left(n^2-m^2\right)y_n=0$ ২+৩

৭। $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x, \forall x\in[0,\pi]$-এর চরম এবং অবম মান নির্ণয় করো। ৫

৮। যদি $u=\log\left(x^3+y^3+z^3-3xyz\right)$ হয়, তাহলে দেখাও $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{-3}{(x+y+z)^2}$ ৫

৯। $x^3+2x^2y-xy^2-2y^3+xy-y^2-1=0$-এর সমস্ত স্পর্শপ্রবণ রেখাগুলি নির্ণয় করো। ৫

Unit-III

(Differential Equation - I)

১০। (ক) $y=e^{-x}(A\cos x+B\sin x)$ সমীকরণ থেকে অবকল সমীকরণটি নির্ণয় করো, যেখানে A, B হল Parameters।

(খ) সমাধান করো ঃ $\left(1+e^{x/y}\right)dx+e^{x/y}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$ ২+৩

১১। সমাধান করো ঃ $\frac{dy}{dx}+\left(\frac{1}{1+x^2}\right)y=\frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}$ ৫

১২। $y=px+ap(1-p), p=\frac{dy}{dx}$ সমীকরণটির সাধারণ (General) ও অনন্য (Singular) সমাধান নির্ণয় করো। ২+৩

Unit-IV

(Co-ordinate Geometry)

১৩। যদি $(a+b)(al^2+2hlm+bm^2)=0$ হয়, তবে দেখাও যে $ax^2+2hxy+by^2=0$ এবং $lx+my=1$ দ্বারা নির্মিত ত্রিভুজটি সমকোণী। ৫

১৪। যদি $ax^2+2hxy+by^2=0$ একটি সামান্তরিকের দুটি সংলগ্ন বাহুর সমীকরণ হয় এবং $lx+my=1$ তার একটি কর্ণ হয় তাহলে দেখাও যে $y(bl-hm)=x(am-hl)$ তার আর একটি কর্ণ হবে। ৫

১৫। $7x^2-2xy+7y^2-16x+16y-8=0$ সমীকরণটিকে তার canonical রূপে পরিবর্তিত করো এবং সেখান থেকে কণিকটির প্রকৃতি (nature) নির্ণয় করো। ৫

১৬। $\frac{l}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$ সরলরেখাটি $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ কণিকটিকে স্পর্শ করলে প্রমাণ করো যে $(A-e)^2 + B^2 = 1$। ৫

১৭। যদি $y^2 = 4ax$-এর সাপেক্ষে একটি বিন্দুর পোলার $x^2 = 4by$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করে তবে দেখাও ওই বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ $xy + 2ab = 0$ হবে। ৫

[English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

Answer ***question no.* 1** and ***any nine*** from the rest, taking at least ***one*** question from each ***Unit***.

1. Choose the correct option from each of the following questions : 2×10

(a) Find the possible value(s) of $\mathrm{Re}(i^{1/2}) + |\mathrm{Im}(i^{1/2})|$.

(i) $-1, 1$ (ii) $0, \sqrt{2}$

(iii) $0, 1$ (iv) $1, \sqrt{2}$

(b) If α, β, γ are the roots of equation $x^3 - 3x^2 + 3x + 7 = 0$ and ω is cube root of unity, then value of $(\alpha-1)/(\beta-1) + (\beta-1)/(\gamma-1) + (\gamma-1)/(\alpha-1)$ is

(i) ω (ii) ω^2

(iii) 3ω (iv) $3\omega^2$

(c) Integrating factor of differential equation $\frac{dy}{dx} + Py = Q$, where P and Q are functions of x is

(i) $\int e^P dx$ (ii) $e^{\int P dx}$ (iii) $e^{-\int P dx}$ (iv) None of these.

(d) The degree of the differential equation $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x\sin\frac{dy}{dx}$ is

(i) 1 (ii) 2 (iii) 3 (iv) not defined.

(e) The pair of straight lines perpendicular to the pair of lines $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ has the equation

(i) $ax^2 - 2hxy + by^2 = 0$ (ii) $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$

(iii) $bx^2 + 2hxy + ay^2 = 0$ (iv) $bx^2 - 2hxy + ay^2 = 0$

(f) If α, β, γ be the roots of the equation $x^3 - 3x^2 + 8x - 5 = 0$ then the equation whose roots are $2\alpha+3, 2\beta+3, 2\gamma+3$ is

(i) $y^3 + 15y^2 + 95y - 217 = 0$ (ii) $y^3 - 15y^2 + 95y - 217 = 0$

(iii) $y^3 - 15y^2 - 95y - 217 = 0$ (iv) $y^3 + 15y^2 + 95y + 217 = 0$

(g) The value of k for which the equation $x^2 + y^2 + 2x + k = 0$ represents a pair of straight line is

(i) 1 (ii) 2 (iii) 3 (iv) 4

(h) The value of $\lim_{x\to 0} \frac{\cos^{-1}(1-x)}{\sqrt{x}}$ is

(i) π (ii) $\frac{\pi}{2}$ (iii) $\frac{\pi}{3}$ (iv) $\frac{\pi}{4}$

(i) The value of A for which the function $f(x)$ is continuous at $x = 0$ where

$f(x) = \sin x \cos\frac{1}{x}, x \neq 0$

$= A, x = 0$ is

(i) 0 (ii) 1 (iii) 2 (iv) 3

(j) If $u\ (x, y) = \tan^{-1}\frac{x^3 + y^3}{x - y}, x \neq y$ then the value of $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$ is

(i) sin$u$ (ii) cos$u$ (iii) sin2u (iv) cos2u

Unit-I

(Algebra - I)

2. (a) If $\tan\log(x + iy) = a + ib$, where $a^2 + b^2 \neq 1$, then prove that $\tan\log(x^2 + y^2) = \frac{2a}{1 - a^2 - b^2}$.

(b) If $\alpha - \beta, \alpha, \alpha + \beta$ are the roots of the equation $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$ then prove that $3\alpha^2 - \beta^2 = 23$. 3+2

3. If $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ show that $A^3 - 5A^2 + 6A - 5I = 0$. Hence find A^{-1}. 3+2

4. Solve by Cardan's method : $x^3 - 12x + 65 = 0$. 5

Unit-II

(Differential Calculus - I)

5. (a) Find the values of a and b in order that $\lim_{x\to 0} \frac{x(1 + a\cos x) - b\sin x}{x^3}$ may be equal to 1.

(b) Examine the continuity of the function defined by $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-a|}{x-a}, & x\neq a\\ 1, & x=a\end{cases}$

at the point $x = a$. 3+2

6. (a) Find y_n, if $y = e^{ax}\cos^2 x \sin x$.

(b) If $y^{1/m}+y^{-1/m}=2x$, prove that $\left(x^2-1\right)y_{n+2}+(2n+1)xy_{n+1}+\left(n^2-m^2\right)y_n=0$ 2+3

7. Find the maxima and minima of the function $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x, \forall x\in[0,\pi]$. 5

8. If $u=\log\left(x^3+y^3+z^3-3xyz\right)$, show that $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\dfrac{-3}{(x+y+z)^2}$. 5

9. Find all asymptotes of $x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3 + xy - y^2 - 1 = 0$ 5

Unit-III

(Differential Equation - I)

10. (a) Find the differential equation of the curve $y = e^{-x}(A\cos x + B\sin x)$, A, B are parameters.

(b) Solve : $\left(1+e^{x/y}\right)dx+e^{x/y}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)dy=0$. 2+3

11. Solve : $\dfrac{dy}{dx}+\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)y=\dfrac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}$ 5

12. Find the general and singular solution of $y = px + ap(1-p)$, $p=\dfrac{dy}{dx}$. 2+3

Unit-IV

(Co-ordinate Geometry)

13. Show that the triangle formed by the straight lines $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ and $lx + my = 1$ is right angled, if $(a + b)(al^2 + 2hlm + bm^2) = 0$. 5

14. If $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ be the equation of two adjacent sides of a parallelogram and $lx + my = 1$ be the equation of one of its diagonals, then show that the equation of its other diagonal is $y(bl - hm) = x(am - hl)$. 5

15. Reduce the equation $7x^2 - 2xy + 7y^2 - 16x + 16y - 8 = 0$ to its canonical form and hence determine the nature of the conic. 5

16. If the straight line $\frac{l}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$ touches the conic $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$, then show that $(A - e)^2 + B^2 = 1$. 5

17. If the polar of a point with respect to the parabola $y^2 = 4ax$ touches the parabola $x^2 = 4by$, then show that the locus of the point is $xy + 2ab = 0$. 5